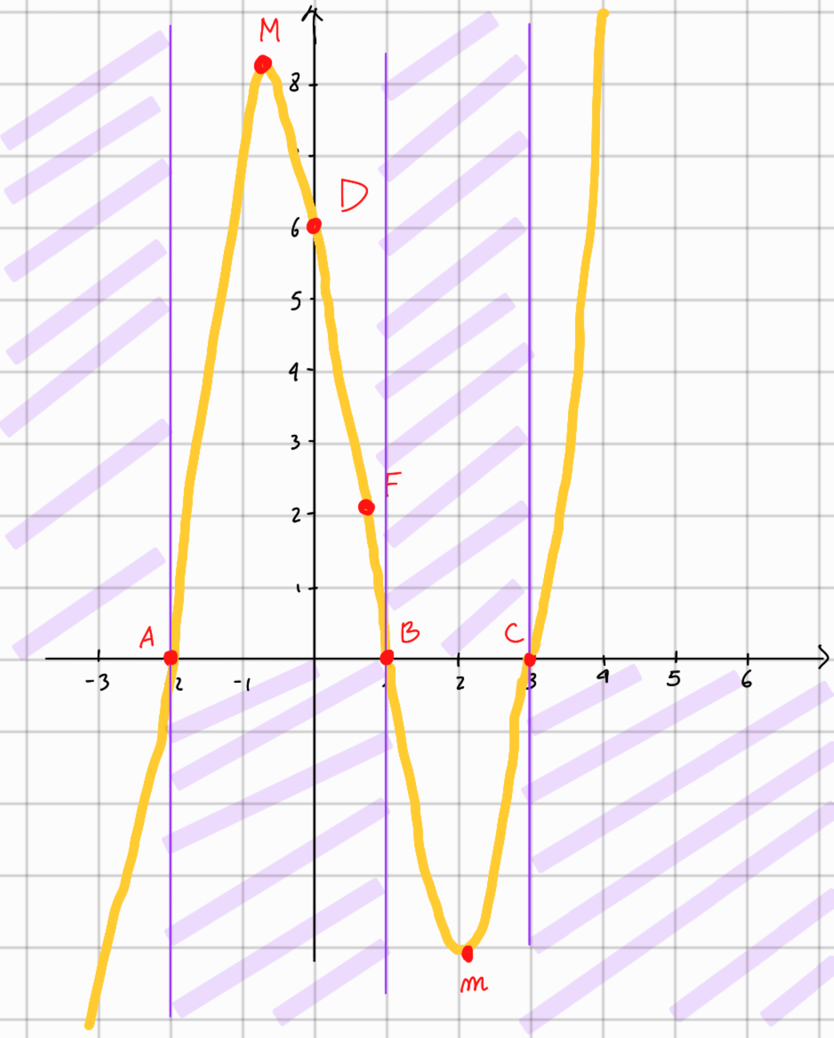
ESAME MATEMATICA e STATISTICA 6 SETTEMBRE 2024



$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

a. $f(x) = (x^2+x-2)(x-3)$

☐ DOMINIO $D = \mathbb{R}$

☐ STUDIO DEL SEGNO e INTERSEZIONE ASSE x

$(x^2+x-2)(x-3) \geq 0$

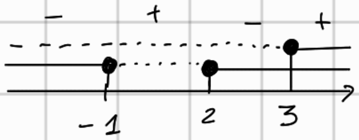
- $x^2+x-2 \geq 0$
- $x-3 \geq 0$

$\Delta = 1+8 = 9$

$x \geq 3$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ ↗ $x_1 = -2$ ↘ $x_2 = 1$

$x \leq -1 \lor x \geq 2$



f è negativa per $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3)$

f è positiva per $x \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$

f è nulla per $x \in \{-2, 1, 3\}$

$A = (-2, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (3, 0)$

☐ INTERSEZIONE ASSE y

$f(0) = -2 \cdot -3 = 6$ $\quad D = (0, 6)$

☐ LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{x^2+x-2}_{+\infty})(\underbrace{x-3}_{-\infty}) = -\infty$$

→ NO ASINTOTI

$$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{x^2+x-2}_{+\infty})(\underbrace{x-3}_{+\infty}) = +\infty$$

☐ STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

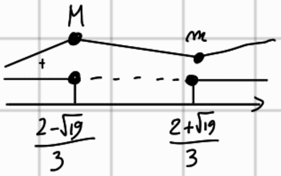
$$f'(x) = (2x+1)(x-3) + (x^2+x-2)\cdot 1 = 2x^2+x-6x-3+x^2+x-2 = 3x^2-4x-5$$

$3x^2-4x-5 \geq 0$

$\Delta = 16+60 = 76$; $\sqrt{76} = \sqrt{4\cdot 19} = 2\sqrt{19}$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{19}}{6}$ → $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{19}}{3} \simeq -0.79$; $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{19}}{3} \simeq 2.12$

$x \leq \dfrac{2-\sqrt{19}}{3} \vee x \geq \dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$



f è crescente per $x \in \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{19}}{3}\right) \cup x \in \left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$

f è decrescente per $x \in \left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}, \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right)$

f è stazionaria per $x \in \left\{\frac{2-\sqrt{19}}{3}, \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right\}$,

$M = \left(\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}, \dfrac{2}{27}(28+19\sqrt{19})\right) \simeq (-0.78, 8.21)$

PUNTO DI MASSIMO

$m = \left(\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}, \dfrac{2}{27}(28-19\sqrt{19})\right) \simeq (2.12, -4.06)$

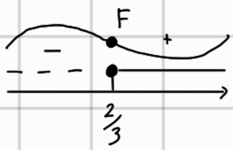
PUNTO DI MINIMO

☐ STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$f''(x) = 6x-4$

$6x-4 \geq 0$

$x \geq \dfrac{2}{3}$



f è CONCAVA per $x \in (-\infty, 2/3)$

f è CONVESSA per $x \in (2/3, +\infty)$

f presenta un punto di flesso $F = \left(2/3, 56/27\right) \simeq (0.67, 2.07)$

b. $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ significa che la funzione in questo punto presenta un punto di flesso.

c. Il teorema di Weierstrass richiede che la funzione sia continua in un insieme chiuso e limitato $[a,b]$, poiché $D = (-\infty, \infty)$ è illimitato il teorema non può essere applicato.

ESERCIZIO 2

$$f(x)=\frac{x}{1+9x^2}$$

a. $F(x)=\int\frac{x}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\int\frac{18x}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\ln|1+9x^2|+C=\frac{1}{18}\ln(1+9x^2)+C$

b. $\int_{1/3}^{1}\frac{x}{1+9x^2}dx=F(1)-F(\tfrac{1}{3})=\frac{1}{18}\ln(1+9)-\frac{1}{18}\ln(1+1)=\frac{1}{18}\left[\ln(10)-\ln(2)\right]$

$=\frac{1}{18}\ln\left(\frac{10}{2}\right)=\frac{1}{18}\ln(5)\simeq 0.09$

c. Il teorema della media integrale si applica a funzioni continue su insiemi chiusi e limitati $[a,b]$, entrambe le ipotesi sono soddisfatte pertanto il teorema si può applicare e ci garantisce che esiste un punto $z\in[\tfrac{1}{3},1]$ tale che

$$\int_{1/3}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx=f(z)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}f(z)$$

ESERCIZIO 3

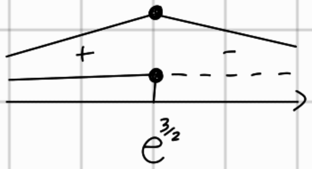
$$G(q)=5q-2q\ln(q)-e^{\pi}$$

$$G'(q)=5-2\left[\ln(q)+\cancel{q}\cdot\frac{1}{\cancel{q}}\right]=5-2\ln(q)-2=3-2\ln(q)$$

$3-2\ln(q)\geq 0$

$\ln(q)\leq\frac{3}{2}$

$q\leq e^{3/2}\simeq 4.48$



Per ottenere il massimo del guadagno la quantità di merce da produrre è $q\simeq 4.48$

ESERCIZIO 4

	x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
	23	10.72	-1.5	-0.03	2.25	0.0009	0.045
	29	10.61	4.5	-0.14	20.25	0.0196	-0.63
	24	10.71	-0.5	-0.04	0.25	0.0016	0.02
	25	10.75	0.5	0	0.25	0	0
	21	10.78	-3.5	0.03	12.25	0.0009	-0.105
	25	10.93	0.5	0.18	0.25	0.0324	0.09
$\Sigma(\dots)$	147	64.5			35.5	0.0554	-0.58
$\frac{\Sigma(\dots)}{6}$	24.5	10.75			$\simeq 5.9167$	$\simeq 0.00923$	$\simeq -0.0967$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{1}{6}\left[10.72+10.61+\dots+10.95\right] = \frac{64.5}{6} = 10.75$$

RIORDINO I DATI PER LA MEDIANA 10.61 10.71 $\boxed{10.72 \quad 10.75}$ 10.78 10.93

$$\text{MEDIANA}(y) = \frac{10.72+10.75}{2} = 10.735$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2 = \frac{1}{6}\left[0.0009+\dots+0.0324\right] = \frac{0.0554}{6} \simeq 0.00923$$

b. RETTA DI REGRESSIONE

$$y = \alpha x + \beta$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\cancel{\frac{1}{6}}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\cancel{\frac{1}{6}}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{-0.58}{35.5} \simeq -0.01634$$

$$\beta = \bar{y} - \alpha\bar{x} = 10.75 - \frac{-0.58}{35.5}\cdot 24.5 \simeq 11.1503$$